

# Kwalifikacja na warsztaty informatyczne Krajowego Fundusz na rzecz Dzieci edycja 2012

## 1 Uwagi wstępne

Poniżej widzisz 4 zadania kwalifikacyjne. Jako rozwiązanie każdego z nich wyślij opis algorytmu wraz z uzasadnieniem jego poprawności. Opis powinien być przede wszystkim zrozumiały. Przykład działania lub pseudokod mogą ilustrować opis, lecz nie powinny go zastąpić. Częścią rozwiązania jest również wskazanie złożoności czasowej i pamięciowej rozwiązania i jej (krótkie) uzasadnienie.

Rozwiązania prześlij mailem na adres [tomasz.kociumaka@fundusz.org](mailto:tomasz.kociumaka@fundusz.org) oraz na adres biura funduszu [fundusz@fundusz.org](mailto:fundusz@fundusz.org) do **30 stycznia 2012 r.**

Preferowany jest format PDF, każde zadanie w osobnym pliku. W nagłówku każdej strony podaj swoje imię i nazwisko oraz numer zadania.

Do zadania 4. poza opisem napisz program, który powinien być implementacją opisanego przez Ciebie algorytmu. Kod źródłowy programu wyślij przez serwis <http://fundusz.sio.mimuw.edu.pl>.

Jeśli masz jakieś pytania (w szczególności dotyczące zadań i warsztatów) pisz na adres [tomasz.kociumaka@fundusz.org](mailto:tomasz.kociumaka@fundusz.org). Pod ten sam adres możesz także stale kierować inne pytania. Jako tutor postaram się na nie odpowiedzieć lub przekierować do kogoś innego.

## 2 Polecane materiały

- T. Cormen, C. Leieron, R. Rivest, C. Stein, *Wprowadzenie do algorytmów*.

Klasyk podręcznik do podstaw algorytmiki. Niestety od kilku lat nie jest wydawany, więc może być trudno dostępny.

- [was.zaa.mimuw.edu.pl](http://was.zaa.mimuw.edu.pl)

Zwłaszcza wykłady 13., 14. i 17., które dotyczą grafów.

- [http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Algorytmy\\_i\\_struktury\\_danych](http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Algorytmy_i_struktury_danych)

Materiały związane z przedmiotem Algorytmy i struktury danych prowadzonym na MIM UW.

W czasie warsztatów będziemy zakładać, że uczestnicy znają kilka podstawowych algorytmów grafowych (BFS, DFS, Dijkstry, algorytmy na minimalne drzewo rozpinające), oraz potrafią je zaimplementować w języku C++ lub Pascal. Wskazane materiały elektroniczne powinny wystarczyć, aby zdobyć taką wiedzę<sup>1</sup>.

## 3 Zadania

### 1. Mrówki

Mrówki zbudowały mrowisko u podnóża słupa długości  $l$  cm. Codziennie każda spośród  $n$  mrówek o ściśle określonej porze wychodzi z mrowiska wspina się na słup. Mrówka o numerze  $i$  wyrusza w momencie  $t_i$ , liczonym w sekundach od północy.

Gdy mrówka dojdzie do wierzchołka słupa lub spotka się z inną mrówką nadchodzącą z przeciwnej strony, zawraca. Gdy dotrze do podstawy słupa, kończy swoją wędrówkę i wchodzi do mrowiska. Wszystkie mrówki poruszają się ze stałą prędkością 1 cm/s, potrafią zawrócić niezauważalnie szybko.

Bajtazar ma za zadanie pomalować ten słup. Nie chciałby jednak skrzywdzić żadnej mrówki, więc chce wykonać swoją pracę wtedy, gdy żadna mrówka nie będzie znajdować się na słupie. Malowanie zajmuje  $t$  sekund i nie można go przerywać.

Bajtazar przyszedł pomalować słup o 8 rano. Kiedy najwcześniej będzie mógł zabrać się do malowania? Możesz założyć, że o północy nie ma żadnych mrówek na drzewie.

<sup>1</sup> Jeśli jednak masz jakieś wątpliwości, pytania, szukasz zadań sprawdzających czy ją faktycznie zdobyłeś, nie wahaj się zadawać pytania.

## 2. Największy wspólny dzielnik

Największy wspólny dzielnik dwóch liczb mniejszych od  $n$  można policzyć w czasie  $O(\log n)$  algorytmem Euklidesa. Czasami zdarza się jednak, że  $n$  nie jest zbyt duże, ale chcemy odpowiedzieć na wiele zapytań o najdłuższy wspólny dzielnik.

Zaprojektuj strukturę danych, która będzie implementować następujące operacje

- `init(n)` inicjalizacja struktury.
- `gcd(x,y)` zapytanie o największy wspólny dzielnik liczb naturalnych  $x$  oraz  $y$  ( $x, y < n$ ), gdzie  $n$  jest wartością podaną przy inicjalizacji.

Inicjalizacja powinna działać w czasie proporcjonalnym do czasu działania sita Eratostenesa (czyli  $O(n \log \log n)$ ). Odpowiedź na zapytanie musi działać w czasie istotnie mniejszym niż  $\log n$ , a odpowiedź na zapytanie należy generować od razu, nie czekając na kolejne zapytania. Im lepszy będzie to czas, tym więcej punktów dostanie rozwiązanie. Pewną liczbę punktów będą także dostawać rozwiązania o nieco gorszym czasie działania inicjalizacji (ale istotnie lepszym niż  $n^2$ ).

## 3. Rdza<sup>2</sup>

Profesor Makary prowadzi badania nad wpływem kwaśnych deszczów na stan torowisk tramwajowych w klimacie umiarkowanym. Zaplanowany przez profesora eksperyment polega na upuszczaniu w ściśle określonych momentach kropli stężonego kwasu na szynę tramwajową i obserwowaniu rozszerzających się po szynie plam rdzy. Ognisko rdzy na szynie zainicjowane przez spadającą kroplę kwasu rozszerza się w tempie 1mm/sek w obydwu kierunkach aż do końca szyny (tj. 1mm/sek w lewo oraz 1mm/sek w prawo). Profesor chciałby obliczyć, kiedy cała szyna zostanie pokryta rdzą. Pomóż mu!

Szyna ma długość  $d$  milimetrów, eksperyment obejmuje upuszczenie  $n$  kropli w czasie  $t$  sekund. Momenty upuszczenia kropeł określone są przez całkowite liczby sekund od rozpoczęcia eksperymentu, a miejsca przez całkowite liczby milimetrów od początku szyny. Możesz założyć, że  $d, t \leq 2^{32}$ .

Złożoności podaj w terminach  $n, d, t$ .

## 4. Projekty<sup>3</sup>

W tym zadaniu należy dostarczyć także program. Pełna treść zadania wraz z dokładnym opisem formatu wejścia i wyjścia znajduje się na <http://fundusz.sio.mimuw.edu.pl>.

Bajtazar właśnie awansował na szefa działu informatyki Bardzo Ważnej Instytucji Państwowej. W jego obowiązkach jest zarządzanie projektami informatycznymi. Instytucja przygotowała listę potencjalnych projektów, które powinny zostać wykonane. Niestety wykonanie niektórych projektów zależy od pomyslnego wykonania innych. Oczywiście zależności między projektami nie tworzą cyklu. Dodatkowo, każdy projekt charakteryzuje się minimalną liczbą programistów, którzy są konieczni do jego wykonania.

Ze względu na cięcia budżetowe nie jest możliwe wykonanie wszystkich  $n$  projektów. Zarząd zdecydował, że zrealizowane zostanie jedynie  $k$  projektów. Bajtazar dostał polecenie zatrudnienia minimalnej liczby programistów, którzy są konieczni do zrealizowania co najmniej  $k$  projektów (przy czym projekty mogą być realizowane sekwencyjnie, tzn. że w jednym momencie wszyscy programiści pracują nad tym samym projektem; nie interesuje nas w żaden sposób szybkość realizacji projektów).

Napisz program, który pomoże Bajtazarowi i wyznaczy minimalną liczbę programistów, których należy zatrudnić. Przyślij też opis, jak w poprzednich zadaniach. Złożoność programu podaj w terminach  $n$  – liczby projektów,  $m$  – liczby zależności oraz  $k$  – liczby projektów, które trzeba wykonać.

---

<sup>2</sup> Zapożyczone z laboratorium do przedmiotu Algorytmy i struktury danych (2011) na wydziale MIM UW

<sup>3</sup> Zapożyczone z laboratorium do przedmiotu Algorytmy i struktury danych (2011) na wydziale MIM UW