

Sieć Toda

Arkadiusz P. Trawiński¹, Stanisław D. Głazek²

Krótki opis problemu

Do opisu układów wielu cząstek używa się między innymi jednowymiarowego modelu, którego autorem jest Morikazu Toda [1]. Model składa się z kulek o jednakowych masach, m , leżących na prostej i oddziałujących jedynie z najbliższymi sąsiadkami za pośrednictwem specjalnych sprężynek. Siły między sąsiednimi kulkami od tych sprężynek są zachowawcze i dane przez potencjał

$$U(r) = U_0 e^{-(r-d)/r_0} + U_0(r-d)/r_0 + \text{const}, \quad (1)$$

gdzie $r > 0$ oznacza odległość między sąsiednimi masami, $d > 0$ oznacza naturalną długość swobodnych sprężynek, a stałe $U_0 > 0$, $r_0 > 0$ i const można dobierać w zależności od zastosowań (np. w granicy $r_0 \rightarrow 0$ model opisuje gaz sztywnych prętów). Dla mas numer k i $k-1$ możemy napisać, że $r = x_k - x_{k-1}$, gdzie x_k oznacza współrzędną położenia masy numer k , a w przypadku $k=1$ (lub $k-1=0$) możemy przyjąć, że $x_0 = 0$ lub $x_0 = -\infty$.

Warsztaty mają na celu zbadanie wybranych przez uczestników przykładów zachowania się modelu Toda złożonego z N mas, zwanego siecią Toda. Równania matematyczne w tym modelu mają wiele rozwiązań. Postać tych równań jest podobna do postaci równań, które można stosować do opisu oddziaływań między cząstkami w różnych układach w fizyce atomowej, jądrowej i cząstek elementarnych.

Zadanie kwalifikacyjne

Krok 1. Równania Newtona

Rozważ układ składający się z N mas, które w chwili początkowej mają położenia $x_1(0), \dots, x_N(0)$ i prędkości $\dot{x}_1(0), \dots, \dot{x}_N(0)$. Kropka oznacza pochodną po czasie. Napisz układ równań Newtona opisujący zachowanie tych mas.

Krok 2. Zamiana zmiennych

Zdefiniujmy nowe zmienne:

$$\begin{cases} a_k(t) = -\frac{1}{2} \frac{\dot{x}_k(t)}{r_0}, \\ b_k(t) = \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{U_0}{m}} e^{\frac{x_k(t) - x_{k+1}(t) + d}{2r_0}}. \end{cases} \quad (2)$$

W przypadku b_N można rozważyć $x_{N+1} = \infty$. Zapisz układ równań na $\dot{a}_k(t)$ i $\dot{b}_k(t)$ za pomocą $a_k(t)$ oraz $b_k(t)$ używając równań Newtona z Kroku 1.

Krok 3. Równania w postaci macierzowej

Zapisz nowo otrzymane równania z Kroku 2 w postaci macierzowej. W tym celu znajdź pewne dwie kwadratowe macierze $N \times N$, których elementy macierzowe wyrażają się przez $a_k(t)$ i $b_k(t)$. Jedna z nich powinna być symetryczna. Oznaczmy ją $L(t)$. Druga powinna być antysymetryczna. Tę oznaczmy $B(t)$. Macierze te powinny spełniać równanie

$$\frac{d}{dt} L = B \cdot L - L \cdot B, \quad (3)$$

gdzie \cdot oznacza mnożenie macierzy według reguły wiersz razy kolumna.

Krok 4. Przypadek $n=2$

Dla przypadku dwuwymiarowej macierzy ($N=2$), zbadaj jak układ dwóch cząstek zachowuje się dla czasów dążących do nieskończoności, $t \rightarrow \infty$. Można wykonać obliczenia ściśle ręką na papierze lub numerycznie za pomocą komputera, ale w obu przypadkach należy przedstawić rozwiązania za pomocą czytelnych wykresów. Co można powiedzieć o macierzy $L(\infty)$?

Literatura:

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Toda_lattice

Podstawowe podręczniki akademickie do algebry, analizy, i metod numerycznych.

W razie trudności z literaturą należy napisać list elektroniczny do prowadzących.

¹Arkadiusz.Trawinski@fuw.edu.pl

²Stanislaw.Glazek@fuw.edu.edu.pl