

## Opadanie mikrocząstek w lepkim płynie Badania doświadczalne i/lub numeryczne

W trakcie Warsztatów uczestnicy będą mieli możliwość doświadczalnego badania opadania cząstek w lepkim płynie w laboratorium grupy badawczej mikroprzepływów i przepływów złożonych w Instytucie Chemii Fizycznej PAN oraz symulacji numerycznych w Instytucie Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Warszawskiego. Możliwy jest wybór ścieżki doświadczalnej bądź numerycznej, jednak obie grupy będą współpracowały.

**Hydrodynamika mikroświata** Świat mechaniki płynów jest niezwykle bogaty. Różnorodność zjawisk towarzyszących przepływowi płynów jest w dużej mierze związana ze strukturą równań Naviera-Stokesa, które je opisują. Tematem warsztatów jest badanie takich przepływów, w których efekty bezwładności płynu są zanedbywalne w stosunku do efektów lepkościowych [1, 2, 3]. Parametrem, który opisuje relację tych dwóch mechanizmów w przepływie, jest *liczba Reynoldsa*  $Re$

$$Re = \frac{\text{siły bezwładności}}{\text{siły lepkości}}.$$

Liczbę Reynoldsa można oszacować, jeśli znamy średnią prędkość przepływu  $U$ , lepkość cieczy  $\eta$ , jej gęstość  $\rho$  oraz charakterystyczną długość  $L$  (np. średnicę kuli opływanej przez ciecz), jako

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}.$$

Dla bardzo małych cząstek w przepływie (takich jak np. bakterie, cząsteczki białek, pyłki albo cząsteczki zawiesiny koloidalnej) liczby Reynoldsa są rzędu  $10^{-4}$ , a zatem można całkowicie pominąć wpływ bezwładności płynu na ruch takich obiektów. W mikroświecie prawdziwe są zasady ruchu, które postulował Arystoteles - prędkość ciała jest proporcjonalna do działającej na nie siły. Ponieważ nie ma bezwładności, zupełnie inne są również mechanizmy pływania mikroorganizmów [1, 2].

**Opadanie cząstki punktowej. Tensor Oseena** Ruch płynu przy bardzo małych liczbach Reynoldsa,  $Re \ll 1$ , może być opisany przy pomocy równań Stokesa. Załóżmy, że w płynie o lepkości  $\eta$  zawieszone są sferyczne cząstki o promieniu  $a$ , które będziemy jednak traktować jak cząstki punktowe – ich ruch pod wpływem pewnej zewnętrznej siły odbywa się tak, jakby siła przyłożona była do jednego punktu, otoczonego przez płyn. Okazuje się, że w takim przypadku pole prędkości wytworzone przez punktową siłę  $\mathbf{F}$ , ma postać

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}, \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{T}(\mathbf{r})$  jest macierzą, nazywaną tensorem Oseena. Jej składowe mają następującą postać

$$T_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta a} \left( \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right), \quad (2)$$

gdzie  $r = |\mathbf{r}|$ . Załóżmy teraz, że na każdą cząstkę działa jednostkowa siła, skierowana wzdłuż kierunku osi  $z$ ,  $\mathbf{F} = -e_z$ . Wówczas prędkość opadania pojedynczej cząstki możemy zapisać jako  $v_0 = (6\pi\eta a)^{-1}$  (prawo Stokesa). W najprostszym przybliżeniu, w przypadku wielu cząstek, prędkość  $i$ -tej cząstki jest sumą jej prędkości opadania i wkładów, pochodzących od pozostałych cząstek

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_i) = \mathbf{v}_0 + \sum_{j \neq i} \mathbf{u}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (3)$$

# Zadanie kwalifikacyjne

Do wyboru proponujemy dwie ścieżki - numeryczno-teoretyczną i doświadczalną. Wybór ścieżki nie zawęży w żaden sposób możliwości zmiany. Osoby, które nadeślą rozwiązanie zadania numerycznego, ale będą chciały uczestniczyć w warsztatach od strony doświadczalnej (i *vice versa*) będą miały taką możliwość. Akceptujemy również rozwiązania numeryczno-doświadczalne, np. po jednym punkcie z każdej grupy. Nie ilość zbadanych zagadnień, a jakość opracowania, decyduje o kwalifikacji. Rozwiązanie zadań ma być przede wszystkim wciągającą zabawą.

## (Zadanie doświadczalno-koncepcyjne)

1. Rozwiąż następujące proste problemy, wykorzystując własności równań Stokesa:

Rozważmy dwie cząstki punktowe w lepkim płynie. Udowodnij, korzystając z symetrii równań Stokesa, że prędkość opadania obu kulek będzie taka sama. Jaka będzie prędkość opadania cząstek w przypadku, gdy (a) cząstki są początkowo ustawione w pionowej linii, (b) początkowo leżą na pionowej prostej, (c) początkowo leżą na prostej nachylonej pod kątem  $\pi/4$  do poziomu?

2. Zdjęcie 1 przedstawia rozpad dużej kropli zawiesiny, zawierającej kuleczki silikonowe o średnicy  $60\text{ }\mu\text{m}$ , w trakcie jej opadania w płynie. Zbadaj to zjawisko doświadczalnie. Opisz swój układ doświadczalny i wnioski z obserwacji. Jak wygląda ewolucja kropli w czasie jej opadania? Jak wygląda sam rozpad i jaki jest jego mechanizm? Jaka jest trajektoria kropli? Czy zjawisko jest powtarzalne? Od czego zależy czas opadania kropli? Czy kropla puszczone blisko ścianki naczynia spada wolniej, czy szybciej? Jaki jest wpływ ścianki naczynia na ruch kropli? Jako zawiesinę, możesz wykorzystać mleko lub atrament (spróbuj scharakteryzować te zawiesiny, wyszukując potrzebne informacje samodzielnie). Lepkość cieczy możesz modyfikować, mieszając wodę z gliceryną w różnych proporcjach.

*Nie musisz odpowiadać na wszystkie z tych pytań ani kierować się nimi - sam wybierz ciekawe aspekty tego zjawiska i spróbuj je zgłębić, a następnie opisz swoje obserwacje i płynące z nich wnioski.*



Rysunek 1: Rozpad kropli zawiesiny kulek silikonowych o średnicy  $60\text{ }\mu\text{m}$  w wodzie. Źródło: B. Metzger, M. Nicholas, E. Guazzelli, J. Fluid Mech. **580**, 283 (2007).

**(Zadanie numeryczne)** Zbadaj opadanie trzech cząstek w płynie pod wpływem siły grawitacji w ramach modelu cząstek punktowych. Napisz symulację w dowolnym języku programowania, która pozwoli śledzić trajektorie trzech cząstek opadających w lepkim płynie. Zbadaj i opisz dynamikę w dwóch szczególnych przypadkach:

1. Cząstki umieszczone w rogach trójkąta równoramiennego,

$$\mathbf{r}_1 = \{0, 0, 0\} \quad \mathbf{r}_2 = \{1, -1, 0\}, \quad \mathbf{r}_3 = \{1, 1, 0\}.$$

Możesz wykorzystać ten przypadek do testowania algorytmu. Hocking oraz Caffish i in. pokazali [4], że w tym przypadku trajektoria jest periodyczna. Jak ona wygląda? Oblicz następującą wielkość

$$A = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_z \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)],$$

i sprawdź, jak zmienia się ona w czasie. Jaka ma ona interpretację?

2. Trzy cząstki ustawione w linii prostej (*czerwona, zielona, niebieska*),

$$\mathbf{r}_1 = \{x, 0, 0\} \quad \mathbf{r}_2 = \{-1, 0, 0\}, \quad \mathbf{r}_3 = \{1, 0, 0\}.$$

Sprawdź, jak zmieniają się trajektorie, gdy zmieniamy położenie początkowe  $x$  czerwonej cząstki. Zbadaj, co dzieje się dla bliskich położenia początkowych – porównaj trajektorie dla  $x = -3.9050$  i  $x = -3.9048$ .

**Uwaga:** z symetrii równań Stokesa [3, 5] wynika, że jeśli zmienimy kierunek działania siły na przeciwny, trajektorie pozostaną takie same, tzn. cząstki powrócą po swoich śladach do położenia początkowych, tak jakby podróżowały wstecz w czasie. Ta ważna własność przepływów Stokesa powinna znaleźć odbicie w algorytmie numerycznym (w pojedynczym kroku czasowym po wykonaniu kroku wstecz powinniśmy znaleźć się w tym samym miejscu). Najprostszy algorytm Eulera nie ma własności odwracalności, i stosowanie go prowadzi do rozbieżności z algorytmem odwracalnym, np. metodą implicit midpoint [6].

## Literatura

- [1] G.I. Taylor, film *Low Reynolds Number Flows*, dostępny na stronie National Committee for Fluid Mechanics Films, <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>
- [2] E.M. Purcell, *Life at low Reynolds number*, Am. J. Phys. **45**, 3 (1977).
- [3] K. Wędołowski, *Równania Stokesa i ich podstawowe własności*. Dostępne na stronie kursu *Hydrodynamika Mikroświata*, prowadzonego przez prof. Marię Ekiel-Jezewską w IPPT PAN, <http://hydro.ippt.gov.pl>
- [4] R.E. Caflish, C. Lim, J.H.C. Luke, A.S. Sangani, *Periodic solutions for three sedimenting spheres*, Phys. Fluids **31**, (1988); L.M. Hocking, J. Fluid. Mech. **20**, 129 (1964)
- [5] A. Myłyk, M. L. Ekiel-Jezewska, *Postępy Fizyki*, **56**, s. 238 (2008). Dostępne na stronie <http://hydro.ippt.gov.pl>
- [6] W.H. Press et al., *Numerical Recipes in C*, Cambridge Univ. Press, dostępne online: <http://apps.nrbook.com/c/index.html>.

**Uwaga! Trudno dostępne pozycje z bibliografii można dostać e-mailem od M. Lisickiego.** W ramach ogólnego wprowadzenia, szczególnie polecamy zapoznanie się z filmem G.I. Taylora [1] oraz artykułem Purcella [2].

### Kontakt do prowadzących

Zachęcamy do zadawania pytań, w razie potrzeby możemy przysłać dodatkowe materiały i wyjaśnić wszelkie wątpliwości.

Paweł Dębski  
Instytut Chemii Fizycznej  
Polskiej Akademii Nauk  
ul. Kasprzaka 44/52  
01-224 Warszawa  
e-mail: [pdebski@ichf.edu.pl](mailto:pdebski@ichf.edu.pl)

Maciej Lisicki  
Instytut Fizyki Teoretycznej  
Wydział Fizyki UW  
ul. Hoża 69  
00-681 Warszawa  
e-mail: [mklis@fuw.edu.pl](mailto:mklis@fuw.edu.pl)  
url: <http://www.fuw.edu.pl/~mklis>